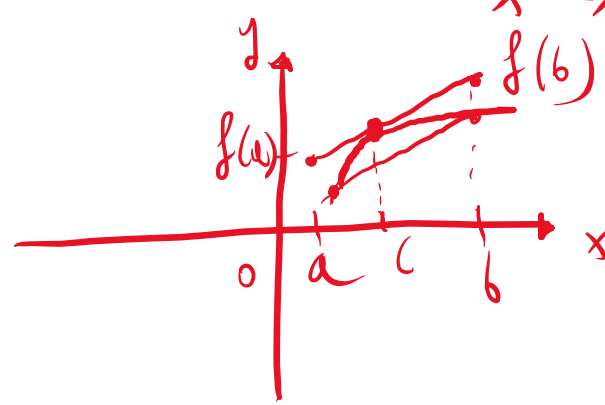


# TEOREMA DI LAGRANGE

SE  $f(x)$  È CONTINUA IN UN INTERVALLO CHIUSO  $[a, b]$   
E DERIVABILE IN  $(a, b)$ ,  $\exists c \in (a, b)$  TALE CHE  
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

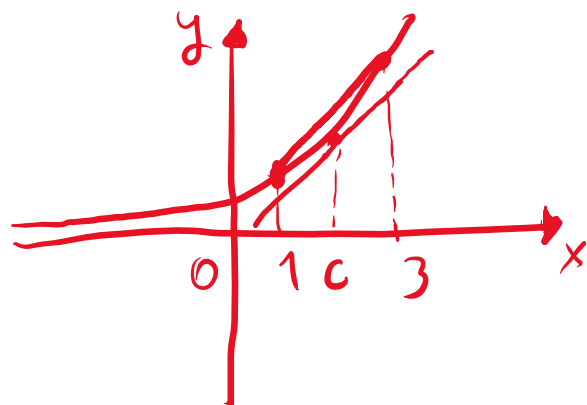
SI COME LA RETTA TANGENTE IN UN PUNTO  $x_0$  A UNA  
CURVA È  $f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  ESISTERÀ SEMPRE  
UN PUNTO NELL'INTERVALLO IN  
CUI LA TANGENTE AL  
GRAFICO È PARALLELA  
AL SEGMENTO CHE UNISCE I 2  
PUNTI.



## ESEMPIO

$f(x) = e^x$  NELL'INTERVALLO  $[1, 3]$ .

I PUNTI SONO  $(1, f(1))$  E  $(3, f(3)) \Rightarrow (1, e), (3, e^3)$ .



ESISTERÀ UN PUNTO  $c$  TRA 1 E  
3 IN CUI LA TANGENTE ALLA  
CURVA È PARALLELA AL  
SEGMENTO.

PER IL TEOREMA DI LAGRANGE, ESISTE

$$c \in (a, b) \mid f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(x) = e^x; \quad f'(x) = e^x; \quad a = 1, \quad b = 3$$

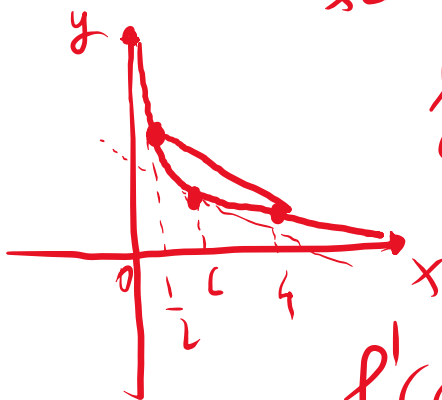
$$f(a) = e, \quad f(b) = e^3$$

$$e^c = \frac{e^3 - e}{3 - 1} \Rightarrow e^c = \frac{e^3 - e}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \ln\left(\frac{e^3 - e}{2}\right) = \ln(8,68) = 1,42$$

$$c \approx 1,42 \in (1, 3).$$

ESERCIZIO | APPLICARE IL TEOREMA DI LAGRANGE ALLA FUNZIONE  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  NELL'INTERVALLO  $(\frac{1}{2}, 4)$ .



$$f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4; \quad f(4) = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}.$$

$$f'(c) = \frac{f(4) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{4 - \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{16} - 4}{\frac{8-1}{2}} = \frac{\frac{1-64}{16}}{\frac{7}{2}} = -\frac{63}{168} \cdot \frac{2}{7} = -\frac{63}{56}$$

Siccome  $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ , ALLORA NEL PUNTO C

DA TROVARE SI AVRA'  $-\frac{2}{c^3} = -\frac{63}{56} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2}{c^3} = \frac{63}{568} \Rightarrow \frac{c^3}{2} = \frac{8}{9} \Rightarrow c^3 = \frac{16}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt[3]{\frac{16}{9}} = 2\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$$

ESERCIZI PER CASA | 1) APPLICARE IL TEOREMA DI LAGRANGE,

TROVANDO IL PUNTO C, ALLA FUNZIONE  $f(x) = 1 + \ln x$ ,  
NEL L'INTERVALLO  $[e, e^4]$ ,

2) TROVARE IL PUNTO C (NEL TEOREMA  
DI LAGRANGE) PER LA FUNZIONE  $f(x) = \sqrt{x+5}$ ,  
CON  $x \in [4, 20]$ .

3) STUDIARE COMPLETAMENTE LA  
FUNZIONE  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ .